



Условия задач, авторские решения, критерии оценивания

1. График потенциала (6 баллов)

Крюков П. А.

Три одинаковых тонких диска радиусом R , однородно заряженных с поверхностной плотностью σ , 2σ и -3σ , расположены так, что ось OX является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0 , d и $2d$, где $d = \frac{R}{1000}$. Потенциал в центре уединённого диска, заряженного однородно с поверхностной плотностью σ , равен 1000 В. Потенциал бесконечно удалённой точки считается равным нулю.

а) (2 балла) Получите формулу $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$, дающую потенциал в центре уединённого однородно заряженного диска. Эту формулу разрешается использовать при выполнении задания следующего пункта, даже если вы не можете её вывести.

б) (4 балла) Изобразите график зависимости потенциала φ электрического поля дисков в точках, лежащих на оси OX , от безразмерной координаты $a = \frac{x}{d}$ для значений a , принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

Решение

а) Потенциал в центре получается в результате интегрирования (суммирования) потенциалов центров тонких колец, на которые разбивается диск

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_0^R \frac{\sigma dr}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}. \quad (1)$$

б) Поскольку поле на расстояниях порядка d однородное, потенциал уединённого диска на оси рядом с центром изменяется линейно в зависимости от координаты

$$\varphi(x) = \varphi_0 - E|x| = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}|x|. \quad (2)$$

Последняя формула может быть получена также в результате интегрирования по кольцам, похожего на вывод формулы (1). Действительно, потенциал на оси диска в точке с координатой x равен

$$\varphi(x) = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - |x|).$$

При малых x в подкоренном выражении в этой формуле можно пренебречь x^2

$$\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \approx R \left(1 + \frac{x^2}{2R^2}\right) - |x| \approx R - |x|,$$

так что в итоге получится соотношение (2).

Рассмотрев суперпозицию трёх дисков, найдём на основе соотношений (1) и (2) зависимость потенциала системы дисков от координаты:

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma|x|}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma|x-d|}{\epsilon_0} + \frac{3\sigma|x-2d|}{2\epsilon_0}. \quad (3)$$

Учитывая, что $d = \frac{R}{1000}$, получаем, раскрыв модули в формуле (3), зависимость потенциала от безразмерной координаты на интересующем нас отрезке

$$\begin{cases} \varphi(a) = (4 - 2 \cdot a) \text{ В}, & 0 < a \leq 1; \\ \varphi(a) = (8 - 6 \cdot a) \text{ В}, & 1 < a \leq 2. \end{cases}$$

Искомый график изображён на рис. 1.

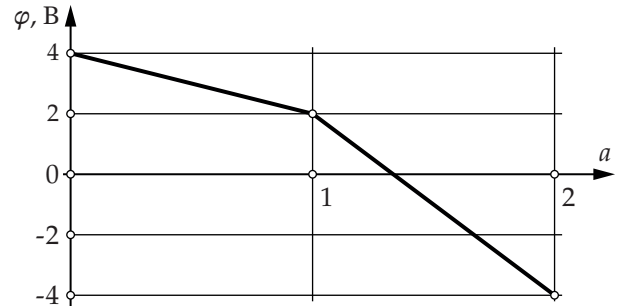


Рис. 1

Этот график можно получить и без использования формулы (2). Систему дисков можно рассматривать, как суперпозицию двух конденсаторов: обкладки одного заряжены с поверхностной плотностью $\pm 3\sigma$, расстояние между ними равно $2d$, обкладки другого заряжены с поверхностной плотностью $\mp 2\sigma$, расстояние между ними равно d . Потенциала поля уединённого конденсатора, с поверхностными зарядами $\pm\sigma$ на обкладках, расположенных в точках с координатами $\pm \frac{d}{2}$, даётся формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(a) = \frac{\sigma x}{\epsilon_0}, & |x| \leq \frac{d}{2}; \\ \varphi(a) = \pm \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}, & |x| \geq \frac{d}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим, что формулы (4) удовлетворяют условию равенства нулю потенциала в бесконечно удалённой точке, при этом снаружи конденсатора потенциал можно считать постоянным только вблизи конденсатора. Сложив потенциалы полей конденсаторов, получим искомый график. **Ответ:** а) Формула выводится суммированием потенциалов малых зарядов, на которые делится диск; б) искомый график изображён на рис. 1.

Критерии

Пункт а) оценивается по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
1a.1	В той или иной форме излагается идея разделения диска на бесконечно малые заряды и дальнейшего суммирования (интегрирования) потенциалов полей этих зарядов.	0,5
1a.2	Предлагается разделить диск на бесконечно малые кольца, записывается формула для потенциала в центре диска $\varphi_0 = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 r}$ или аналогичная.	0,5
1a.3	Получена формула $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$.	1,0

Пункт б) оценивается по разному в зависимости от способа решения.

Если в процессе решения сначала выводится формула для потенциала уединённого диска вблизи него $\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |x|$ или аналогичная, а затем рассматривается суперпозиция потенциалов, то схема оценивания такова.

№	Критерий	Балл
1b.1	В той или иной форме высказывается мысль о том, что в интересующей нас области поле пластин однородное.	1,0
1b.2	Получена формула для потенциала вблизи уединённого диска $\varphi(x) = \varphi_0 - E x = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x $ или аналогичная.	1,0
1b.3	Получена формула зависимости потенциала от координаты для системы дисков $\varphi(x) = -\frac{\sigma x }{2\epsilon_0} - \frac{\sigma x-d }{\epsilon_0} + \frac{3\sigma x-2d }{2\epsilon_0}$ или аналогичная. Если потенциалы складываются графически, то верно изображены графики потенциалов поля пластин.	1,0
1b.4	Изображена верная зависимость потенциала от безразмерной координаты.	1,0

Если в процессе решения сначала производится интегрирование и выводится формула для потенциала поля на оси уединённого диска, которая далее линеаризуется при малых x , то схема оценивания незначительно меняется.

№	Критерий	Балл
1b.1	Записана формула для потенциала на оси диска в виде интеграла $\varphi(x) = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$ или аналогичная	0,5
1b.2	Верно вычислен интеграл, получена формула $\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} - x)$ или аналогичная.	0,5
1b.3	Проведена линеаризация в точной формуле для потенциала, получена приближённая формула $\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x $ или аналогичная.	1,0
1b.4	Получена формула зависимости потенциала от координаты для системы дисков $\varphi(x) = -\frac{\sigma x }{2\epsilon_0} - \frac{\sigma x-d }{\epsilon_0} + \frac{3\sigma x-2d }{2\epsilon_0}$ или аналогичная. Если потенциалы дисков складываются графически, то верно изображены графики потенциалов поля пластин.	1,0
1b.5	Изображена верная зависимость потенциала от безразмерной координаты.	1,0

Если в основе решения лежит рассмотрение суперпозиции (наложения) конденсаторов, то решения такого типа оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
1b.1	Высказывается мысль о том, что система дисков может быть представлена в виде суперпозиции двух конденсаторов с поверхностными зарядами $\pm 3\sigma$ и $\mp 2\sigma$.	1,5
1b.2	Приводится верная зависимость для потенциала поля внутри и снаружи уединённого конденсатора.	1,0

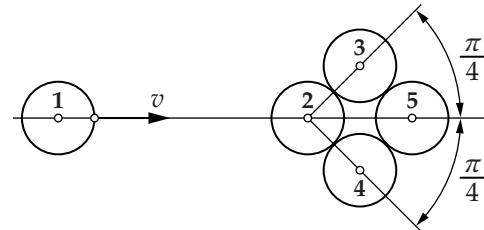
№	Критерий	Балл
1b.3	Изображена верная зависимость потенциала от безразмерной координаты.	1,5

2. Аэрохоккей (8 баллов)

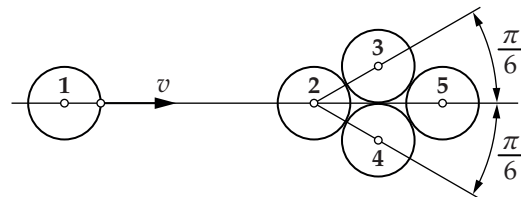
Крюков П. А.

Шайбы одинаковой массы могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Боковая поверхность шайб гладкая, столкновения между шайбами можно считать абсолютно упругими.

а) (2 балла) В начальный момент шайбы 2, 3, 4, 5 располагаются так, что их центры являются вершинами квадрата (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 1$ м/с. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



б) (6 баллов) В этом случае центры неподвижных шайб образуют ромб с острым углом $\frac{\pi}{3}$ (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 с такой же скоростью $v = 1$ м/с, как и в первом случае. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



В обоих случаях считайте, что столкновения происходят мгновенно. За время столкновения шайбы не успевают сдвинуться. В точках на рисунке, где шайбы касаются друг друга, на самом деле они разделены микроскопическими воздушными зазорами.

Решение

а) Шайба 1 останавливается, передавая импульс шайбе 2. Далее происходит столкновение шайбы 2 с шайбами 3 и 4. Шайбы гладкие, следовательно их скорости в процессе столкновения меняются только под действием сил нормальной реакции, поэтому после столкновения скорости третьей и четвёртой шайб направлены под углом $\frac{\pi}{4}$ к горизонтальной прямой, направление скорости второй шайбы не меняется. Теперь расчёт скорости второй шайбы v_2 и третьей шайбы v_3 после столкновения может быть сделан на основе законов сохранения. Получится система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}v_3 + v_2 = v, \\ 2v_3^2 + v_2^2 = v^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим следующие значения скоростей второй и третьей шайб: $v_2 = 0$, $v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Таким образом,

вторая шайба останавливается, а третья и четвёртая движутся со скоростью $\frac{v}{\sqrt{2}}$ по траекториям, составляющим одинаковые углы $\frac{\pi}{4}$ с горизонтальной прямой. Легко видеть, что в процессе дальнейшего движения шайбы 3 и 4 с пятой шайбой не сталкиваются, поэтому пятая шайба покоится в исходном положении. В итоге имеем ответы: $v_1 = v_2 = v_5 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ м/с.

б) В этом случае после столкновения второй шайбы с шайбами 3 и 4, скорости этих шайб u_3 и u_4 направлены под углом $\frac{\pi}{6}$ к горизонтальной прямой, вдоль которой до и после столкновения движется вторая шайба. Обозначив u_2 скорость второй шайбы после столкновения, запишем законы сохранения. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}u_3 + u_2 = v, \\ 2u_3^2 + u_2^2 = v^2, \end{cases}$$

где u_2 Решив систему, находим значения скоростей: $u_2 = -\frac{v}{5}$, $u_3 = \frac{2\sqrt{3}v}{5}$. Таким образом, вторая шайба летит назад. Очевидно, далее она сталкивается с первой шайбой и передаёт ей весь свой импульс. Шайбы 3 и 4 при дальнейшем движении сталкиваются с шайбой 5. Рассмотрим это столкновение.

Из симметрии следует, что скорость шайбы 5 после столкновения будет направлена горизонтально. Пусть ось OX системы координат также направлена горизонтально. Обозначим v_{\perp} проекцию скорости шайбы 3 после столкновения на направление, перпендикулярное линии, соединяющей центры шайб 3 и 5. Проекция скорости на это направление при столкновении не меняется, поэтому $v_{\perp} = u_3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3v}{5}$. Проекцию скорости шайбы 3 на направление вдоль линии, соединяющей центры 3 и 5 обозначим v_{\parallel} . Положительному значению проекции v_{\parallel} соответствует направление от шара 3 к шару 5.

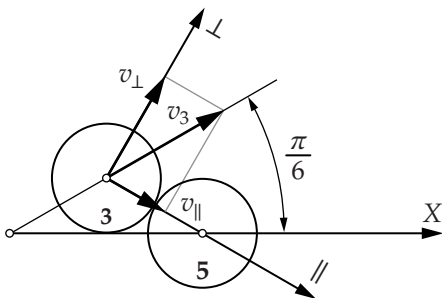


Рис. 2

Закон сохранения импульса в проекции на ось OX даёт уравнением

$$\frac{6v}{5} = v_5 + 2v_{\perp} \cos \frac{\pi}{3} + 2v_{\parallel} \cos \frac{\pi}{6},$$

которому после преобразований можно придать вид

$$\frac{3v}{5} = v_5 + v_{\parallel} \sqrt{3}. \quad (5)$$

Закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{24v^2}{25} = v_5^2 + 2v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2 \Rightarrow \frac{6v^2}{25} = v_5^2 + 2v_{\parallel}^2.$$

Законы сохранения образуют систему уравнений. Эту систему можно решить, например, так: выразим v_5 из закона

сохранения импульса, и подставим в закон сохранения энергии. В итоге получится квадратное уравнение

$$5v_{\parallel}^2 - 2\frac{3\sqrt{3}}{5}vv_{\parallel} + \frac{3}{25}v^2 = 0.$$

Решив которое, найдём корни

$$v_{\parallel}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}v}{25}, \quad v_{\parallel}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}v}{5}.$$

Второй корень не имеет физического смысла, поскольку скорость шайбы 5 в этом случае, как следует из формулы (5), оказывается равна нулю. Подставляя значение $v_{\parallel}^{(1)}$ в закон сохранения импульса (5), получаем ответ для скорости пятого шара

$$v_5 = \frac{3v}{5} + v_{\parallel}^{(1)} \sqrt{3} = \frac{12v}{25} = 0,48 \text{ м/с.}$$

Для конечной скорости шаров 3 и 4 имеем

$$v_4 = v_3 = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \frac{2\sqrt{57}v}{25} \approx 0,60 \text{ м/с.}$$

Ответ: а) $v_1 = v_2 = v_5 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ м/с;

б) $v_1 = \frac{v}{5} = 0,2$ м/с, $v_2 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{2\sqrt{57}v}{25} \approx 0,60$ м/с, $v_5 = \frac{12v}{25} = 0,48$ м/с.

Критерии

а) Если получены верные ответы для всех скоростей, то за этот пункт выставляется полный балл вне зависимости от способа решения. В противном случае решение оценивается по следующей схеме (все скорости, о которых идёт речь в схеме оценивания, относятся к конечному состоянию).

№	Критерий	Балл
2a.1	Верно найдена скорость шайбы 1.	0,2
2a.2	Верно найдена скорость шайбы 5.	0,2
2a.3	Верно записан закон сохранения импульса для столкновения шайб 2, 3 и 4	0,5
2a.4	Верно записан закон сохранения энергии для столкновения шайб 2, 3 и 4	0,5
2a.5	Верно найдена скорость шайбы 2.	0,2
2a.6	Верно найдена скорость шайбы 3.	0,2
2a.7	Верно найдена скорость шайбы 4.	0,2

б) Если получены верные ответы для всех скоростей в конечном состоянии, то за этот пункт выставляется полный балл вне зависимости от способа решения. В противном случае решение оценивается по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
2b.1	Верно записан закон сохранения импульса для столкновения шайб 2, 3 и 4	0,4
2b.2	Верно записан закон сохранения энергии для столкновения шайб 2, 3 и 4	0,4
2b.3	Найдено верное значение $u_2 = \frac{v}{5}$ и направление (против начальной скорости v) скорости шайбы 2 после столкновения с шайбами 2, 3 и 4	0,2

№	Критерий	Балл
2b.4	Верно найдена скорость $u_3 = \frac{2\sqrt{3}v}{5}$ шайб 3 и 4 после столкновения шайб 2, 3 и 4	0,2
2b.5	Указано, что после столкновения шайб 2, 3 и 4 происходит второе столкновение шайб 2 и 1.	0,6
2b.6	Верно найдены скорости шайб 2 и 1 после второго столкновения	0,2
2b.7	Указывается, что в процессе столкновения шайб 3, 4 и 5 проекция скорости шайбы 3 на направление, перпендикулярное к линии, соединяющей центры шайб 3 и 5, не меняется	0,2
2b.8*	Верно записан закон сохранения импульса для столкновения шайб 3, 4 и 5.	0,8
2b.9*	Верно записан закон сохранения энергии для столкновения шайб 3, 4 и 5.	0,6
2b.10*	Получена верная система уравнений, решив которую можно определить скорости шайб 3, 4 и 5 после столкновения.	0,4
2b.11	Верно найдена скорость шайбы 5 после столкновения шайб 3, 4 и 5.	1,0
2b.12	Верно найдены скорости шайб 3 и 4 после столкновения шайб 3, 4 и 5.	0,8
2b.13	Получены верные значения всех конечных скоростей.	0,2

(*) Если ошибки в записи уравнений в пунктах 2b.8-2b.10 связаны только с неверным определением скоростей до столкновения, то оценка за эти пункты не снижается.

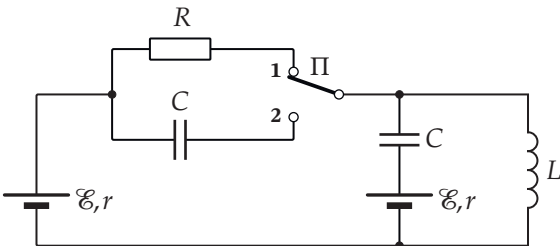
3. С двумя батарейками (8 баллов)

Крюков П. А.

В цепи, схема которой изображена на рисунке, представленном ниже, параметры \mathcal{E} , L , C известны. Сопротивление соединительных проводов и катушки равно нулю. Внутреннее сопротивление батареи r и сопротивление резистора R удовлетворяют соотношениям

$$r \ll R, \quad rC \ll \sqrt{LC}, \quad RC = \sqrt{2LC}.$$

Изначально переключатель Π находится в положении 1, при этом в цепи установился стационарный режим. Напряжение на конденсаторе, соединённом с клеммой 2, равно нулю. В момент времени $t = 0$ переключатель мгновенно переводят в положение 2.



а) (6 баллов) Определите, в какой момент времени t_L ток через катушку впервые изменит направление.

б) (2 балла) Какое количество теплоты Q выделится в цепи за очень большое время после перевода ключа в положение 2.

Решение

а) После перевода переключателя в положение 2 за очень короткое время (порядка $\tau_C = rC$) произойдёт перезарядка конденсаторов, так что напряжение на каждом из них станет равно $\frac{\mathcal{E}}{2}$, обкладки конденсаторов, обращённые к клемме 2, будут заряжены отрицательно. Действительно, батареи, конденсаторы и катушка образуют колебательный контур, в котором будут происходить слабо затухающие колебания. Характерное время изменения тока через катушку при возникающих колебаниях равно (по порядку величины) $\tau_{RLC} = \sqrt{LC}$. Из условия следует, что $\tau_C \ll \tau_{RLC}$, поэтому ток через катушку не успеет измениться за время быстрой перезарядки конденсаторов. Таким образом, в начальный момент через катушку течёт ток $I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$, такой же, как до перевода переключателя в положение 2.

В колебательном процессе в каждый момент времени токи, текущие через батарейки, будут одинаковыми, при этом через катушку будет течь ток вдвое больший: $I(t) = 2\dot{q}$. Запишем уравнение обхода (второе правило Кирхгофа) для контура, содержащего катушку и одну из батарей

$$\dot{q} + \frac{\dot{q}r}{2L} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}. \quad (6)$$

Затухание колебаний происходит за время порядка $\frac{L}{r}$, которое благодаря сильному неравенству, данному в условии, оказывается значительно больше периода колебаний, равного по порядку величины \sqrt{LC} . Таким образом, для ответа на вопрос пункта а) задачи достаточно рассмотреть вместо уравнения (6) уравнение колебаний без затухания

$$\ddot{q} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}.$$

Общее решение этого уравнения даётся формулой

$$q(t) = C\mathcal{E} + q_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (7)$$

где $\omega^2 = \frac{1}{2LC}$, параметры q_0 и φ_0 определяются из начальных условий. Ток через катушку равен удвоенной производной заряда, поэтому из формулы (7) следует зависимость

$$I(t) = -2\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8)$$

Для нулевого момента из начальных условий и зависимостей (7) и (8) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{C\mathcal{E}}{2} = C\mathcal{E} + q_0 \cos \varphi_0; \\ \frac{\mathcal{E}}{R} = -2q_0\omega \sin \varphi_0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем уравнение

$$\omega \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1}{RC} \quad (9)$$

для определения начальной фазы. По условию $\omega RC = \frac{RC}{\sqrt{2LC}} = 1$, поэтому уравнение (9) имеет решение $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Из формулы (8) следует, что направление тока изменяется в момент времени t_L , удовлетворяющий соотношению

$$\omega t_L = \frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом, имеем ответ: $t_L = \frac{3\pi}{4\sqrt{2LC}}$.

б) Количество теплоты можно найти, используя закон сохранения энергии, записанный в виде соотношения

$$A_{\mathcal{E}} = \Delta W_C + \Delta W_L + Q. \quad (10)$$

Когда в цепи установится стационарный режим, ток через катушку течь не будет, а конденсаторы будут заряжены до напряжения \mathcal{E} , поэтому изменение энергии конденсаторов ΔW_C в процессе перезарядки и затухания колебаний равно

$$\Delta W_C = 2 \cdot \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}, \quad (11)$$

изменение энергии магнитного поля катушки даётся формулой

$$\Delta W_L = -\frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} = -\frac{C\mathcal{E}^2}{4}. \quad (12)$$

При выводе формулы (12) использовалось соотношение $R^2 = \frac{2L}{C}$, следующее из условия.

Одна из батарей в процессе установления стационарного режима перемещает нулевой заряд, другая перемещает заряд $C\mathcal{E}$, поэтому суммарная работа ЭДС $A_{\mathcal{E}}$ из формулы (10) равна

$$A_{\mathcal{E}} = C\mathcal{E}^2. \quad (13)$$

Подставляя выражения (11), (12) и (13) в уравнение, отражающее закон сохранения (10), находим количество теплоты

$$Q = A_{\mathcal{E}} - \Delta W_C - \Delta W_L = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}.$$

Ответ: а) $t_L = \frac{3\pi}{4\sqrt{2LC}}$; б) $Q = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}$.

Критерии

а) Решения оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
3а.1	Указано (возможно, неявно), что после перевода переключателя в положение 2 сначала происходит быстрая перезарядка конденсаторов, а затем начинаются слабозатухающие колебания.	1,2
3а.2	Верно найдены значения зарядов конденсаторов сразу после быстрой перезарядки $q(0) = \frac{C\mathcal{E}}{2}$.	0,4
3а.3	Верно указана полярность зарядов конденсаторов сразу после быстрой перезарядки — обкладки, обращённые к клемме 2, заряжены отрицательно.	0,2
3а.4	Указывается (возможно, неявно), что ток через катушку после перевода переключателя в положение 2 остаётся таким же, как до переключения	0,4
3а.5	Найдено верное значение тока через катушку в начальный момент $I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$.	0,2
3а.6	Указывается, что в процессе колебаний в любой момент времени токи через батарейки равны половине тока через катушку.	0,4
3а.7	Записывается верное уравнение колебаний в виде $\ddot{q} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}$ или аналогичном.	0,8

№	Критерий	Балл
3а.8*	Записано общее решение уравнения колебаний без учёта начальных условий в виде $q(t) = C\mathcal{E} + q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ или аналогичном.	0,6
3а.9*	Составлены уравнения для определения констант с использованием начальных условий.	0,4
3а.10*	Получена верная зависимость $q(t)$ с учётом начальных условий	0,4
3а.11	Верно найдено время t_L	1,0

(*) Если ошибки в записи уравнений в пунктах 3а.8-3а.10 связаны только с неверным определением начальных зарядов и тока (не учитывается быстрая перезарядка или учитывается неверно), то оценка за эти пункты не снижается.

б) Правильный ответ на вопрос этого пункта оценивается полным баллом вне зависимости от способа решения.

Чисто теоретически возможно определение количества теплоты, как несобственного интеграла от тепловой мощности по времени. Если подобное решение приводит к верному ответу, то оценивается полным баллом. Если же в процессе расчётов допущены арифметические ошибки, но с физической точки зрения всё сделано верно, то выставляется 1 балл.

Решения, основанные на законе сохранения энергии, оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
3б.1	Записан закон сохранения энергии в виде формулы $A_{\mathcal{E}} = \Delta W_C + \Delta W_L + Q$ или аналогичной.	0,3
3б.2	Верно найдено изменение энергии конденсаторов $\Delta W_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$.	0,5
3б.3	Верно найдено изменение энергии катушки $\Delta W_L = -\frac{C\mathcal{E}^2}{4}$.	0,5
3б.4	Верно подсчитана работа батареи $A_{\mathcal{E}} = C\mathcal{E}^2$.	0,5
3б.5	Получен верный ответ $Q = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}$.	0,2

4. Накачивая шину (15 баллов) Американский дедушка

В задаче рассматривается физическая модель, описывающая некоторые особенности процесса накачивания камеры велосипедного колеса. Объём камеры V_0 считается неизменным. Начальное давление воздуха в камере равно P_0 при температуре окружающей среды T_0 . После накачивания воздух в камере должен создавать давление P при той же температуре T_0 . Воздух считается идеальным двухатомным газом ($c_V = 2,5R$).

а) (6 баллов) В этом пункте камеру соединяют через ниппель с сосудом очень большого объёма V_1 ($V_1 \gg V_0$), который содержит воздух при температуре T_0 и таком давлении P_{\max} ($P_{\max} > P$), что после заполнения камеры и её охлаждения до температуры T_0 давление воздуха в камере становится равно P . Ниппель пропускает воздух в камеру, до тех пор пока давление в ней не сравняется с давлением

в сосуде, после этого ниппель закрывается и обратно воздух не выпускает.

«Проталкивание» в камеру порции воздуха из сосуда происходит очень быстро, поэтому можно считать, что процесс «проталкивания» осуществляется без теплообмена между этой порцией и воздухом, остающимся в сосуде, а также между воздухом в камере и окружающей средой. В результате температура и давление воздуха в камере повышаются до значений P_{\max} и T_{\max} . Через некоторое время после этого температура воздуха в камере сравнивается с температурой окружающей среды T_0 , давление в камере становится равно P .

Считая известными значения $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па, определите P_{\max} и T_{\max} .

b) Теперь представим себе, что камера накачивается воздухом при помощи ручного насоса. В начале каждого цикла цилиндр насоса объёмом V_C ($V_C \ll V_0$) заполняется воздухом при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0 . Пусть в начале i -го цикла давление в камере равно P_{i-1} . На i -м цикле воздух в цилиндре сначала адиабатически сжимается поршнем от давления P_0 до давления P_i , а затем «проталкивается» через ниппель при постоянном давлении P_i без теплообмена, как в пункте а) задачи. После этого открывается выпускной клапан, через который в цилиндр насоса поступает воздух из окружающей среды при давлении P_0 , поршень отодвигается в исходное положение, цилиндр заполняется атмосферным воздухом при давлении P_0 . На этом цикл заканчивается. Естественно, придётся совершить довольно много ($N \gg 1$) таких циклов «проталкивания» воздуха в камеру, для того чтобы после установления температуры T_0 давление в камере стало равно P . Поскольку накачивание камеры происходит очень быстро, теплообмен между воздухом в камере и окружающей средой начинается уже после окончания работы насоса.

b1) (1 балл) Сколько циклов N необходимо совершить, чтобы накачать камеру? Параметры P_0 , P , V_C и V_0 считаются известными.

b2) (3 балла) Какую работу A_i совершает поршень на i -м цикле? Ответ выразите через P_0 , P_i и V_C .

b3) (2 балла) Определите изменение давления в камере на i -м цикле ΔP_i , считая P_0 , P_i , V_C и V_0 известными.

b4) (2 балла) Для того чтобы найти давление в камере после окончания k -го цикла, используем следующий приём. Соотношение, полученное в предыдущем пункте, можно представить в виде

$$\frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha, \quad (14)$$

где $f(P_i)$ — некоторая функция P_i , α — коэффициент, не зависящий от P_i (α и $f(P_i)$ вам известны, если вы сделали пункт b3). Просуммируем выражения, даваемые формулой (14), от $i = 1$ до $i = k$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha \cdot k. \quad (15)$$

Суммирование в формуле (14) можно приближённо заменить на интегрирование:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} \approx \int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{f(P)}.$$

Определите давление P_k в камере после k -го цикла. Параметры P_0 , V_C , V_0 и k считаются известными.

b5) (1 балл) Вычислите P_{\max} и T_{\max} , считая известными значения параметров $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па.

Указание. Значение определённого интеграла от степенной функции даётся формулой

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{(k-1)} \left(\frac{1}{a_1^{k-1}} - \frac{1}{a_2^{k-1}} \right).$$

Решение

a) Для того, чтобы при температуре окружающей среды давление в камере оказалось равно P , следует «протолкнуть» в камеру количество воздуха

$$\Delta \nu = \frac{(P - P_0)V_0}{RT_0}.$$

Этот воздух занимал в сосуде объём

$$V' = \frac{\Delta \nu RT_0}{P_{\max}} = \frac{(P - P_0)V_0}{P_{\max}}.$$

«Проталкивая» порцию воздуха в камеру, силы давления совершают работу

$$A = P_{\max} V' = (P - P_0)V_0; \quad (16)$$

Можно считать, что давление в сосуде почти не меняется, ведь его объём очень большой. За счёт работы A увеличивается внутренняя энергия воздуха в камере и воздуха в проталкиваемой порции. Поскольку теплообмена нет, из формулы (16) следует соотношение

$$(P - P_0)V_0 = \frac{5R(\nu + \Delta \nu)\Delta T}{2}, \quad (17)$$

где ν — начальное количество воздуха в камере. Для конечного состояния воздуха в камере (после охлаждения до температуры T_0) справедливо уравнение состояния

$$PV_0 = (\nu + \Delta \nu)RT_0. \quad (18)$$

Подставляя количество вещества из формулы (18) в соотношение (18) получаем уравнение

$$\frac{P - P_0}{P} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\Delta T}{T_0},$$

из которого следует ответ для температуры

$$T_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P} \right) T_0 = 380 \text{ К}.$$

Давление находится из закона Шарля

$$P_{\max} = P \frac{T_{\max}}{T_0} = 3,80 \text{ Па}.$$

b1) Количество циклов «проталкивания» N можно определить, зная начальное и конечное количество газа в камере. За один цикл в камеру проталкивается воздух из насоса в количестве $\Delta \nu = \frac{P_0 V_C}{RT_0}$, поэтому количество циклов равно

$$N = \frac{(P - P_0)V_0}{RT_0 \Delta \nu} = \frac{(P - P_0)V_0}{P_0 V_C}. \quad (19)$$

b2) При адиабатическом сжатии от давления P_0 до давления P_i поршнем совершается работа, равная изменению внутренней энергии сжимаемого в насосе

воздуха

$$A_{Q=0} = \frac{5}{2} P_0 V_C \left(\frac{T'}{T_0} - 1 \right).$$

где T' — температура, которая достигается в конце сжатия. При помощи уравнения адиабаты $TP^{-\frac{2}{5}} = \text{const}$ выражение для работы при адиабатическом сжатии может быть записано в виде

$$A_{Q=0} = \frac{5}{2} P_0 V_C \left(\left(\frac{P_i}{P_0} \right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right). \quad (20)$$

Далее работа совершается при постоянном давлении. Она равна

$$A_P = P_i V' = P_i V_C \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{\frac{5}{2}} = P_i^{\frac{2}{7}} P_0^{\frac{5}{7}} V_C. \quad (21)$$

Суммируя работы (18) и (19), получаем для работы на i -м цикле формулу

$$A_i = A_{Q=0} + A_P = \frac{7}{2} P_i^{\frac{2}{7}} P_0^{\frac{5}{7}} V_C - \frac{5}{2} P_0 V_C. \quad (22)$$

б3) За счёт работы A_i изменяется внутренняя энергия того воздуха, который уже был в камере на момент начала i -го цикла и той порции, которая «проталкивается» в камеру. Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U_i = \frac{5}{2} P_i V_0 - \frac{5}{2} \cdot (P_{i-1} V_0 + P_0 V_C). \quad (23)$$

Приравняв изменение внутренней энергии (23) и работу (22), с учётом равенства $\Delta P_i = P_i - P_{i-1}$ имеем формулу

$$\Delta P_i = \frac{7}{5} \cdot P_i^{\frac{2}{7}} P_0^{\frac{5}{7}} \frac{V_C}{V_0}. \quad (24)$$

б4) Осуществляя интегрирование формулы (24), как описано в формулировке задачи, получаем соотношение

$$\frac{7}{5} \cdot \left(P_k^{\frac{5}{7}} - P_0^{\frac{5}{7}} \right) = \frac{7}{5} P_0^{\frac{5}{7}} \frac{V_C}{V_0} \cdot k.$$

Сделав преобразования в полученной формуле, находим ответ

$$P_k = P_0 \left(1 + \frac{V_C k}{V_0} \right)^{\frac{7}{5}}. \quad (25)$$

б5) Подставляем в формулу для давления (25) количество циклов $k = N$ из формулы (19), находим максимальное давление

$$P_{\max} = P_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{P_0} \right)^{\frac{7}{5}} = P_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{7}{5}} \approx 4,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Максимальную температуру можно найти из закона Шарля, как при ответе на вопрос пункта а), получится формула

$$T_{\max} = T_0 \frac{P_{\max}}{P} \approx 466 \text{ К}.$$

Ответ: а) $T_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P} \right) T_0 = 380 \text{ К}$, $P_{\max} = P \frac{T_{\max}}{T_0} = 3,80 \text{ Па}$;

б1) $N = \frac{(P - P_0) V_0}{P_0 V_C}$;

б2) $A_i = \frac{7}{2} P_i^{\frac{2}{7}} P_0^{\frac{5}{7}} V_C - \frac{5}{2} P_0 V_C$;

б3) $\Delta P_i = \frac{7}{5} \cdot P_i^{\frac{2}{7}} P_0^{\frac{5}{7}} \frac{V_C}{V_0}$;

б4) $P_k = P_0 \left(1 + \frac{V_C k}{V_0} \right)^{\frac{7}{5}}$;

б5) $P_{\max} = P_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{7}{5}} \approx 4,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T_{\max} = T_0 \frac{P_{\max}}{P} \approx 466 \text{ К}$.

Критерии

а) Верные числовые ответы для P_{\max} и T_{\max} оцениваются полным баллом вне зависимости от способа решения. В противном случае решения оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
4а.1	Найдено количество вещества, которое необходимо добавить в камеру для достижения требуемых в конце процесса давления и температуры $\Delta \nu = \frac{(P - P_0) V_0}{RT_0}$.	0,8
4а.2	Высказывается мысль о том, что внутренняя энергия содержимого камеры увеличивается за счёт работы, совершаемой силами давления по «проталкиванию» порции воздуха в сосуд. Записывается формула $A = P_{\max} V'$, где V' — объём, занимаемый порцией проталкиваемого газа в сосуде.	1,2
4а.3	Получена формула $(P - P_0) V_0 = \frac{5R(\nu + \Delta \nu) \Delta T}{2}$, отражающая равенство изменения внутренней энергии и работы, совершаемой силами давления, или аналогичная.	1,4
4а.4	Найдена верная формула для максимальной температуры $T_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P} \right) T_0$	0,8
4а.5	Найдена верная числовое значение $T_{\max} = 380 \text{ К}$	0,2
4а.6	Найдена верная формула для максимального давления $P_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P} \right) P$	0,5
4а.7	Найдено верное числовое значение максимального давления $P_{\max} = 3,80 \cdot 10^5 \text{ Па}$	0,1

б1) Верная формула оценивается полным баллом. Неверная даёт ноль баллов.

б2) Решения оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
4б2.1	Получена верная формула для работы при адиабатическом сжатии $A_{Q=0} = \frac{5}{2} P_0 V_C \left(\left(\frac{P_i}{P_0} \right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right)$ или аналогичная.	1,4
4б2.2	Получена верная формула для работы при постоянном давлении $A_P = P_i^{\frac{2}{7}} P_0^{\frac{5}{7}} V_C$ или аналогичная.	1,4
4б2.3	Получен верный ответ для работы за цикл	0,2

б3) Схема оценивания представлена в таблице.

№	Критерий	Балл
4б3.1	Предлагается приравнять изменение внутренней энергии воздуха в камере и зачисляемой порции работе на i -м цикле.	0,6
4б3.2	Получена верная формула для изменения давления ΔP_i .	1,4

б4) В случае если получена верная формула — полный балл. Если получена неверная формула, но только потому

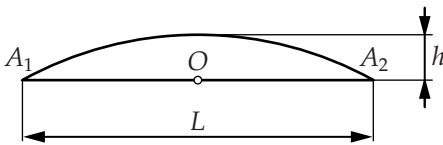
что в предыдущем пункте было найдено неверное выражение для ΔP_i , то всё равно ставится полный балл. Если в решении допущены вычислительные ошибки, при этом принципиально всё сделано верно, то 1 балл.

b5) Каждый из ответов оценивается в 0,5 балла.

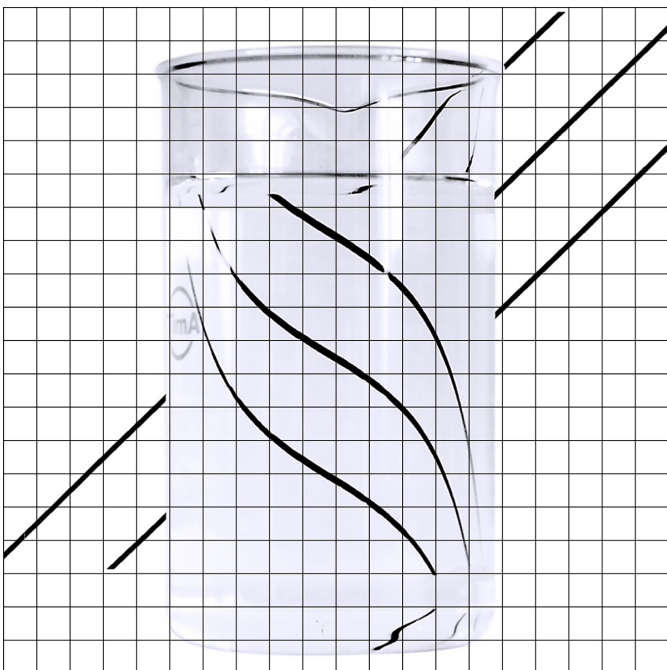
5. Цилиндрическая линза (10 баллов)

Крюков П. А.

Если цилиндр из стекла с показателем преломления n разрезать по плоскости, параллельной оси цилиндра, то получится цилиндрический сегмент, который с оптической точки зрения представляет собой цилиндрическую линзу. Если толщина этой линзы h (см. рисунок) мала по сравнению с её шириной L и радиусом кривизны выпуклой поверхности R , то можно говорить о тонкой цилиндрической линзе. Для такой линзы поперечное увеличение имеет разные значения в разных направлениях. В направлении вдоль оси O поперечное увеличение равно 1, иначе говоря, размеры предмета и изображения вдоль этой оси одинаковые. Осью O мы называем прямую, параллельную оси исходного цилиндра, проходящую через середину хорды A_1A_2 (см. рисунок).



a) (3 балла) Пусть на плоскую сторону тонкой цилиндрической линзы падает параллельный пучок света круглого сечения. Ось пучка перпендикулярна плоской поверхности линзы и пересекает ось O линзы. Радиусы пучка и выпуклой поверхности линзы равны r и R соответственно, показатель преломления материала линзы равен $n = \frac{4}{3}$. За линзой на расстоянии $2R$ от неё располагается экран, параллельный плоскости линзы. Определите площадь светлого пятна на экране. Все лучи пучка проходят через линзу.



b) (7 баллов) Тонкостенная мензурка диаметром 80 мм (толщиной стенок можно пренебречь) заполнена водой (показатель преломления равен 1,33) и стоит на горизонтальном столе на неизвестном расстоянии от вертикальной стены. На стене закреплён лист, на котором изображены три прямые параллельные линии. Их наблюдают через мензурку. Используя фотографию, приведённую ниже (увеличенный вариант см. на дополнительном листе), определите расстояние от оси мензурки до стены.

Ось объектива фотоаппарата при фотографировании старались ориентировать перпендикулярно стене. В процессе обработки в графическом редакторе фотографию обрезали, поверх изображения была нанесена сетка.

Решение

a) В направлении вдоль оси O размер пучка, как следует из условия, не меняется. Найдём изменение размера пучка в направлении, перпендикулярном оси. Фокусное расстояние плосковыпуклой линзы, сделанной из материала с показателем преломления $\frac{4}{3}$, даётся формулой

$$f = \frac{R}{n-1} = 3R. \quad (26)$$

Таким образом, если бы экран располагался на расстоянии $3R$ от линзы, то пучок круглого сечения изобразился в сильно вытянутый эллипс, — в отрезок длиной $2r$. Однако, экран находится на расстоянии $2R$ от линзы, поэтому на нём наблюдается светлое пятно в виде эллипса с полуосями r и $\frac{r}{3}$, площадь которого равна

$$S = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Отметим, что можно было бы обойтись без использования формулы (26). Можно было рассмотреть преломление лучей падающего пучка на выпуклой границе раздела и найти расстояние, на котором пересекаются эти лучи.

b) Для лучей, идущих вблизи оси мензурки, последняя представляет собой две тонкие плосковыпуклые линзы (радиус выпуклой поверхности каждой из этих линз равен R), разделённые плоскопараллельной пластинкой толщиной $2R$ (см. рис. 3).

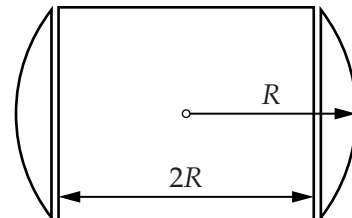


Рис. 3

Эта оптическая система формирует перевёрнутое изображение прямой линии, которое имеет вид кривой из-за аберрации. Однако, вблизи оси мензурки отрезки прямых приближённо изображаются в отрезки прямых. Поскольку цилиндрическая линза изменяет размер изображения вдоль горизонтальной оси, но не меняет его вдоль вертикальной, углы, которые составляют отрезки-изображения с горизонтальной осью отличаются от углов между линиями-предметами и горизонталью. Построив на фотографии касательные к линиям-изображениям

вблизи оси мензурки, можно сравнить углы, которые образуют касательные к изображениям и прямые (предметы) с горизонталью. На рис. 4 сделано такое построение, углы обозначены α и β . Справедливо соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \Gamma_0, \quad (27)$$

где Γ_0 — увеличение (вдоль горизонтальной оси), с которым изображается предмет в системе двух тонких цилиндрических линз и плоскопараллельной пластинки, на которые разбивается исходный цилиндр. Делая измерения по фотографии, устанавливаем, что значение увеличения приближённо равно

$$\Gamma_0 \approx \frac{8}{5}. \quad (28)$$

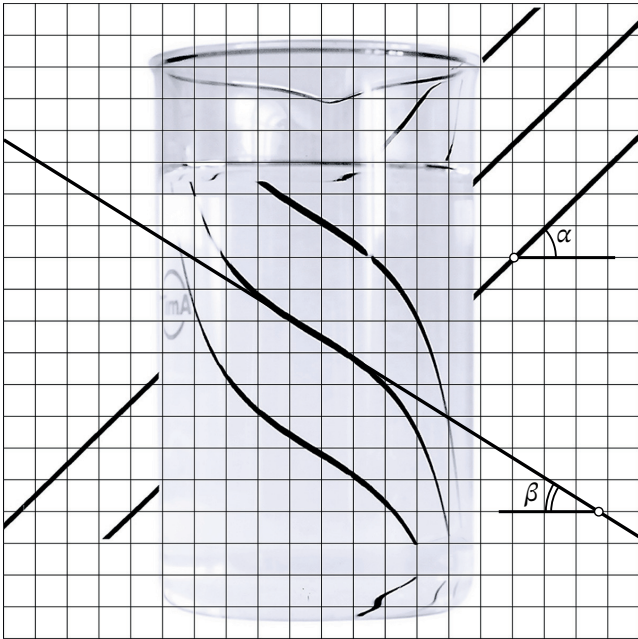


Рис. 4

Далее расчёт можно провести двумя способами. Первый способ предполагает использование формулы линзы. Сначала рассматривается изображение в первой линзе, рассчитывается его увеличение Γ_1 . Это изображение является предметом для плоско-параллельной пластинки. Плоско-параллельная пластинка размеров предмета не меняет. Изображение в ней является предметом для второй линзы, в которой получается изображение с увеличением Γ_2 . Общее увеличение равно произведению увеличений $\Gamma_0 = \Gamma_1 \Gamma_2$. Второй способ предполагает рассмотрение преломления лучей в цилиндре.

Покажем, как делается расчёт первым способом. Пусть предмет находится на расстоянии a_1 от мензурки (так что расстояние от оси мензурки до предмета равно $x = R + a_1$). Поскольку фокусное расстояние плосковыпуклой «водяной» линзы равно $3R$, как следует из формулы (26), расстояние a'_1 до изображения предмета в линзе равно

$$a'_1 = \frac{3Ra_1}{a_1 - 3R}. \quad (29)$$

Величина a_1 может быть отрицательной. Увеличение изображения в первой линзе, таким образом, равно

$$\Gamma_1 = \left| \frac{3R}{a_1 - 3R} \right|. \quad (30)$$

Расстояние от изображения в первой линзе до второй линзы равно $2R - a'_1$. Однако между линзами вставлена плоскопараллельная пластинка толщиной D , которая приближает предметы ко второй линзе на расстояние $\Delta a = D \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{R}{2}$. Таким образом, расстояние от изображения в плоскопараллельной пластинке до второй линзы равно

$$a_2 = 2R - a'_1 - \Delta a = -\frac{3R(a_1 + 3R)}{2(a_1 - 3R)}. \quad (31)$$

Подставляя в формулу линзы расстояние a_2 , получаем для расстояния до изображения следующую формулу

$$a'_2 = \frac{R(a_1 + 3R)}{a_1 - R}. \quad (32)$$

Из соотношений (31) и (32) находим увеличение изображения во второй линзе

$$\Gamma_2 = \left| \frac{a'_2}{a_2} \right| = \left| \frac{2(a_1 - 3R)}{3(a_1 - R)} \right|. \quad (33)$$

Теперь перемножив (30) и (33), найдём общее увеличение

$$\Gamma_0 = \left| \frac{2R}{a_1 - R} \right|. \quad (34)$$

Выражение под знаком модуля может быть положительным или отрицательным. Найдём для увеличения (28), измеренного по фотографии, расстояние a_1 . Если предположить, что $a_1 < R$, то после раскрытия модуля в формуле (34) и решения уравнения получим $a_1 = -\frac{R}{4}$, что очевидно, не соответствует физической реальности. Рассматривая значения a_1 , удовлетворяющие неравенству $a_1 > R$, раскрывая модуль, и решая уравнение, получаем $a_1 = 2,25R$. Это значение не вступает в противоречие с физической реальностью. Таким образом, расстояние от оси мензурки до стены получается равным

$$x = R + a_1 = \frac{13}{4}R = 130 \text{ мм}. \quad (35)$$

При расчёте вторым способом следует рассмотреть два луча, идущих из точечного источника S (см. рис. 5). Обозначим угол падения луча SD_2 на поверхность цилиндра φ . Будем считать этот угол малым. Он приближённо равен $\varphi = \frac{h}{R}$.

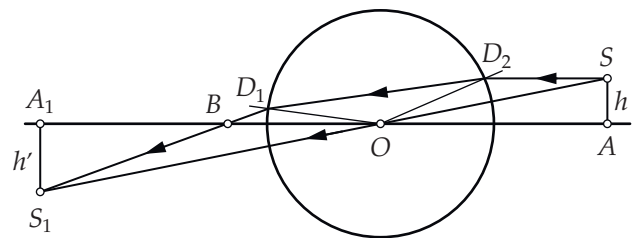


Рис. 5

Из закона преломления следует, что острые углы в равнобедренном треугольнике D_1OD_2 равны $\frac{3\varphi}{4}$. Далее нетрудно показать, что угол D_1OA_1 равен $\frac{\varphi}{2}$, а точка D_1 располагается на расстоянии $h - 2R\frac{\varphi}{4} = \frac{h}{2}$ от прямой A_1A , поэтому длина отрезка BO равна

$$BO = R + \frac{\frac{h}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = 2R.$$

Рассматривая треугольники BA_1S_1 , OA_1S_1 и OAS , можно получить для $x = AO$ уравнение

$$\frac{h'}{h} \cdot x - 2R = \frac{h'}{h} \cdot 2R,$$

Учитывая равенство $\Gamma_0 = \frac{h'}{h}$, и подставляя вместо увеличения Γ_0 значение $\frac{8}{5}$, найденное по фотографии, это уравнение можно решить и получить такой же ответ, как и в первом случае $x = \frac{13R}{4}$.

Ответ: а) $S = \frac{\pi r^2}{3}$; б) $x = (120 \pm 15)$ мм.

Критерии

а) Верный ответ оценивается полным баллом вне зависимости от способа решения. В противном случае решения оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
5a.1	Получена верная формула для фокусного расстояния плосковыпуклой линзы $f = \frac{R}{n-1} = 3R$ тем или иным способом.	1,2
5a.2	Получены верные значения длин полуосей эллипса-изображения: r и $\frac{r}{3}$.	0,6
5a.3	Найден верный ответ для площади пятна.	0,2

б) Решения оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
5b.1	Предлагается рассматривать изображения, лежащие вблизи оси мензурки.	0,4
5b.2	Указывается, что в вертикальном направлении (по рисунку) линии изображаются без увеличения, а в горизонтальном с увеличением, поэтому изменяются углы, которые образуют линии-предметы и линии-изображения с горизонталью.	0,8
5b.3	Получена формула $\frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \beta} = \Gamma_0$, где α и β — углы, определяемые по фотографии, или аналогичная.	0,4
5b.4	По фотографии определяется верное значение увеличения Γ_0 . Верным считается значение, попадающее в интервал $1,6 \pm 0,2$.	0,6

Поскольку расчёт увеличения может проводиться двумя способами далее предлагается две схемы оценивания.

Если цилиндр представляется в виде совокупности двух линз и плоскопараллельной пластинки, то схема оценивания такова.

№	Критерий	Балл
5b.5	Получена формула для увеличения в первой линзе $\Gamma_1 = \left \frac{3R}{a_1 - 3R} \right $ или аналогичная.	0,6
5b.6	Указывается, что плоскопараллельная пластинка толщиной $2R$ сдвигает изображение на расстояние $\Delta a = D \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{R}{2}$.	0,6
5b.7	Верно найдено расстояние между изображением в плоскопараллельной пластинке и второй линзой. Получена формула $a_2 = -\frac{3R(a_1 + 3R)}{2(a_1 - 3R)}$ или аналогичная.	0,8

№	Критерий	Балл
5b.8	Получена формула для увеличения во второй линзе $\Gamma_2 = \left \frac{2(a_1 - 3R)}{3(a_1 - R)} \right $ или аналогичная.	1,0
5b.9	Указывается, что общее увеличение равно произведению увеличений $\Gamma_0 = \Gamma_1 \Gamma_2$.	0,2
5b.10	Получена формула для общего увеличения $\Gamma_0 = \left \frac{2R}{a_1 - R} \right $ или аналогичная.	0,8
5b.11	Найдено верное значение расстояния x между осью и экраном. Верным считается значение, попадающее в интервал (120 ± 15) мм	0,8

Если рассматривается преломление параксиальных лучей в цилиндре, то решения оцениваются по следующей схеме.

№	Критерий	Балл
5b.5	Указывается, что луч, пересекающий ось цилиндра, не испытывает преломления.	0,6
5b.6	Верно рассчитываются углы, описывающие преломление луча не проходящего через ось цилиндра, на ближней к стене поверхности цилиндра.	0,6
5b.7	Верно рассчитываются углы, описывающие преломление луча не проходящего через ось цилиндра, на дальней от стены поверхности цилиндра.	1,2
5b.8	Получена формула для общего увеличения $\Gamma_0 = \left \frac{2R}{x - 2R} \right $ или составлено уравнение, из которого Γ_0 легко находится.	1,6
5b.9	Найдено верное значение расстояния x между осью и экраном. Верным считается значение, попадающее в интервал (120 ± 15) мм.	0,8